

conséquent, les « rayons » ultrasonores qui donnent naissance à des échos dans le monocristal sont de très faibles inclinaisons sur l'axe OZ ( $\theta \leq 3^\circ$ ).

1) **Retard de phase dû à la diffraction.** — Comme pour le milieu isotrope, ce retard  $\delta\gamma(Z)$  est donné par :

$$\delta\gamma(Z) = \arctg \frac{A_2}{A_1}$$

Les intégrales  $A_1$  et  $A_2$  sont toujours données par les formules (10). Pour évaluer ces intégrales, il faut calculer le produit scalaire  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ . Nous avons donc à déterminer le module et la direction de  $\vec{k}$  pour chaque direction de  $\vec{r}$ . Mais l'énergie élémentaire émise par  $d\sigma$  vers  $d\sigma'$  est portée par  $\vec{P}$ . Ce vecteur est donc colinéaire avec  $\vec{r}$  et l'on peut se servir de la relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{k}$  pour trouver la direction de ce dernier vecteur.

2) **Relation entre les directions de  $\vec{P}$  et  $\vec{k}$  pour  $\vec{k}$  légèrement incliné sur l'axe binaire.** — Rappelons que le vecteur de Poynting  $\vec{P}$  est obtenu à partir des déplacements et des contraintes. Ces dernières peuvent d'ailleurs se déduire des déplacements à l'aide du tenseur des constantes élastiques exprimé dans le système de coordonnées considéré.

Si nous prenons le problème en sens inverse, il s'agit de déterminer les vitesses et les déplacements pour chaque direction de propagation  $\vec{k}$ . A partir des vitesses, nous pouvons déterminer  $|\vec{k}| = \omega/V$ ,  $V$  étant la vitesse, alors que les déplacements nous donnent  $\vec{P}$  (à un facteur près). Puisque nous n'examinons ici qu'un seul mode de propagation, nous ne nous intéressons qu'aux variations d'une seule vitesse et d'un seul vecteur de déplacement (longitudinal ou quasi-longitudinal) quand  $\vec{k}$  change légèrement de direction autour de l'axe binaire.

Dans le trièdre désorienté  $\{Ox'y'k\}$ , on peut écrire  $\vec{P}$  sous la forme :

$$\vec{P} = P_{x'}\vec{x}' + P_{y'}\vec{y}' + P_k\vec{k}/|\vec{k}| \quad (12)$$

$\vec{x}'$  et  $\vec{y}'$  sont unitaires. Tout calcul fait, nous trouvons les expressions suivantes, lesquelles sont valables pour tous les monocristaux appartenant au système cubique :

$$\left. \begin{aligned} P_{x'} &= D \frac{(C_{11} - C_{12} - 2C_{44})(C_{11} + C_{12})}{(C_{11} + C_{44})} \theta \cos \Phi \\ P_{y'} &= D \frac{(2C_{44} + C_{12} - C_{11})(3C_{12} + 2C_{44} + C_{11})}{2(C_{11} + C_{12})} \theta \sin \Phi \\ P_k &= D(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})/2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

où  $D$  est une constante dont nous ferons abstraction par la suite et qui fait intervenir l'amplitude des vibrations, la pulsation  $\omega$  et la vitesse de propagation suivant l'axe binaire OZ (16).

Puisque  $\theta$  est petit, on peut prendre :

$$\vec{x}' = \vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{y}' = \vec{y}$$

$\vec{x}$  et  $\vec{y}$  étant unitaires. D'autre part, on peut exprimer  $\vec{k}/|\vec{k}|$  dans le trièdre  $\{Oxyz\}$  :

$$\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \theta \cos \Phi \vec{x} + \theta \sin \Phi \vec{y} + \vec{z} \quad (14)$$

$\vec{z}$  étant unitaire dans la direction Oz ( $\vec{z} \equiv \vec{n}$ ). D'après la formule (12),  $\vec{P}$  peut alors s'écrire dans le même trièdre  $\{Oxyz\}$  sous la forme :

$$\vec{P} = (P_{x'} + P_k \theta \cos \Phi) \vec{x} + (P_{y'} + P_k \theta \sin \Phi) \vec{y} + P_k \vec{z}$$

soit sous la forme :

$$\vec{P} = P_1 \theta \cos \Phi \vec{x} + P_2 \theta \sin \Phi \vec{y} + P_3 \vec{z}$$

où  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  peuvent directement être calculés d'après les valeurs des constantes élastiques  $C_{ij}$ .

On peut également écrire  $\vec{r}$  dans le trièdre  $\{Oxyz\}$ . Mais puisque le produit vectoriel  $\vec{P} \wedge \vec{r} = 0$ , nous pouvons obtenir deux relations indépendantes qui donnent  $\theta$  et  $\Phi$  en fonction des coordonnées de  $M(\rho, \varepsilon)$  et de  $N(x, z)$

$$\left. \begin{aligned} \theta \sin \Phi &= -\frac{P_3 \rho \sin \varepsilon}{P_2 z} \\ \theta \cos \Phi &= \frac{P_3 (x - \rho \cos \varepsilon)}{P_1 z} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Nous avons ainsi déterminé la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$ , expression (14), pour chaque direction de  $\vec{r}$ .

3) **Calcul de  $|\vec{k}|$ .** —  $|\vec{k}| = \omega/V$ , où  $V$  est la valeur de la vitesse dans la direction de  $\vec{k}$ . Pour les petites inclinaisons de  $\vec{k}$  sur l'axe binaire, nous pouvons utiliser directement le résultat de Waterman que nous avons mentionné précédemment, expressions (1) et (4). Nous pouvons donc écrire :

$$V = V_0 \left\{ 1 + \frac{k_1 \theta^2 [(2k_3 + 1) \cos^2 \Phi + (2k_4 - 5) \sin^2 \Phi]}{2(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})} \right\}$$

$V_0$  est la vitesse des ondes longitudinales dans la direction de l'axe binaire OZ, les  $K_i$  sont calculés comme précédemment à partir des constantes élastiques.

Connaissant la direction et le module de  $\vec{k}$ , on peut calculer sans difficulté le produit « de phase »  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ .

4) **Calcul de l'effet de la diffraction sur la vitesse dans nos monocristaux de silicium.** — Pour effectuer ce calcul, nous avons pris les données suivantes :

vitesse des ondes longitudinales suivant l'axe binaire  $V_0 = 9\,000$  m/seconde ;  
longueur d'onde  $\Lambda_0 = 0,3$  mm, c'est-à-dire une fréquence de 30 MHz ;  
diamètre du transducteur émetteur-récepteur  $2a = 12$  mm.

L'hypothèse que  $\theta$  reste petit est vérifiée ( $\theta \leq 6^\circ$ ) pour les distances  $Z$  supérieures à 225 mm. Rappelons que  $Z$  est la distance parcourue par un signal ultrasonore entre l'émission et la réception, et qu'un barreau en silice de 230 mm de longueur est interposé comme connecteur entre le transducteur et le monocristal.

Les intégrales  $A_1$  et  $A_2$ , données par les formules (10), ont été remplacées par des sommes discontinues d'une manière analogue à celle utilisée pour le milieu isotrope. Les résultats du calcul sont représentés par la courbe de la figure 11 qui donne le retard de phase  $\delta\gamma(Z)$  dû à la diffraction. A l'aide de cette courbe, nous pouvons avoir une idée de l'erreur qu'entraîne la diffraction sur

la vitesse. Dans nos expériences, la distance  $Z$  est comprise entre 460 et 940 mm, compte tenu de la longueur du connecteur (230 mm), de l'épaisseur de nos monocristaux (24 mm) et du nombre d'échos intéressés par les mesures (pris = 11). Suivant une méthode indiquée précédemment dans l'exemple du milieu isotrope, nous avons trouvé une erreur relative sur la vitesse de  $2.10^{-5}$ .

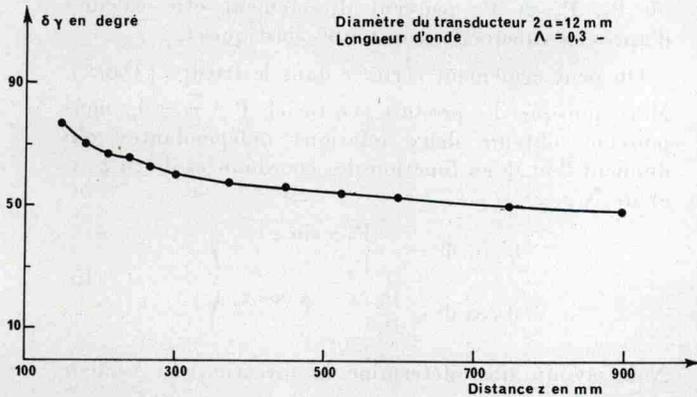


FIG. 11. —  $\delta\gamma$  Retard de phase dû à la diffraction suivant un axe binaire du silicium monocristallin.

*Remarques.* — Dans le calcul précédent, nous avons supposé que le transducteur émetteur-récepteur est normal à l'axe binaire, c'est-à-dire que le monocristal est parfaitement orienté. Pour un monocristal légèrement désorienté, on peut considérer qu'en première approximation, l'erreur totale ne dépasse pas la somme arithmétique de deux erreurs, la première étant due à la diffraction dans un monocristal d'orientation parfaite, la deuxième à la désorientation seulement.

**II-I. Effet de la diffraction sur les vitesses des ondes transversales.** — Pour ces ondes, on ne peut plus utiliser l'équation du rayonnement ultrasonore dans les fluides et le calcul, même approché, devient difficile. On sait cependant que la divergence du faisceau est d'autant plus importante que le rapport entre la longueur d'onde et le diamètre du transducteur est plus élevé. Comme les vitesses des ondes transversales sont nettement inférieures à celles des ondes longitudinales, il s'ensuit que, pour un même diamètre du transducteur et une même fréquence de travail, l'effet de la diffraction sur la vitesse est plus faible pour les ondes transversales que pour les longitudinales.

**II-J. Conclusion sur le chapitre II.** — 1) **Mesures absolues.** — Dans ce chapitre, nous avons examiné différentes sources d'erreur qui interviennent dans les mesures absolues des vitesses de propagation. C'est ainsi que nous avons calculé, du moins approximativement, les erreurs dues aux causes suivantes :

- 1) Désorientation des monocristaux ( $\leq 1/2^\circ$ ), ce qui peut entraîner une erreur relative sur les vitesses  $\leq 0,7.10^{-4}$ .
- 2) Présence des surfaces latérales, ce qui entraîne dans notre cas une erreur relative  $\leq 0,2.10^{-4}$ .

3) Diffraction dans un milieu illimité entraînant une erreur relative  $\leq 0,2.10^{-4}$ .

Compte tenu de l'ordre de grandeur de ces erreurs, nous admettons que l'erreur relative totale entraînée dans les mesures des vitesses par l'ensemble de ces causes peut s'obtenir en ajoutant les erreurs dont chacune est due à une cause séparée. Dans ces conditions, nous estimons que cette erreur est de l'ordre de  $2.10^{-4}$ .

2) **Mesures relatives.** — L'ordre de grandeur indiqué plus haut ne concerne que l'erreur relative dans les mesures absolues, cette erreur étant définie par  $\Delta V/V$ , où  $V$  est la vitesse.

Or, dans notre travail, nous avons déterminé la valeur d'une vitesse à une haute température  $\theta \leq 900^\circ$  C par une méthode indirecte. Celle-ci consiste à mesurer d'abord la valeur  $V_0$  de la vitesse à  $25^\circ$  C, puis à mesurer le rapport  $V_\theta/V_0$  où  $V_0$  est la valeur de la vitesse à la température  $\theta$ . Il convient donc de souligner que les causes d'erreur citées plus haut affectent nettement moins les mesures relatives telles que celles des rapports  $V_\theta/V_0$  que les mesures absolues. Pour le voir, il suffit d'examiner l'effet de la température sur ces causes.

1) La désorientation du monocristal ne change pas avec la température ; il en est de même pour l'erreur relative qu'elle entraîne dans la mesure absolue de la vitesse à toute température.

2) La présence des surfaces latérales fait intervenir une erreur relative proportionnelle à  $(\Lambda/2a)^2$ , où  $\Lambda$  est la longueur d'onde et  $2a$  le diamètre du monocristal.

3) La diffraction peut être considérée comme faisant intervenir une erreur relative proportionnelle à  $\Lambda/2a$  ; ce rapport mesure, en quelque sorte, la divergence du faisceau ultrasonore. Nous pouvons alors écrire l'erreur relative que les causes précédentes peuvent entraîner dans la mesure de la vitesse à  $25^\circ$  C sous la forme :

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = k_1 + k_2 \left( \frac{\Lambda_0}{2a_0} \right) + k_3 \left( \frac{\Lambda_0}{2a_0} \right)^2 \quad (16)$$

où  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  sont trois constantes qui ne dépendent pas de la température. En outre, d'après les calculs précédents :

$$k_1 = 0,7.10^{-4}; \quad k_2 \left( \frac{\Lambda_0}{2a_0} \right) = 0,2.10^{-4}; \quad k_3 \left( \frac{\Lambda_0}{2a_0} \right)^2 = 0,2.10^{-4}$$

De la même manière, on peut écrire :

$$\frac{\Delta V_\theta}{V_\theta} = k_1 + k_2 \left( \frac{\Lambda_\theta}{2a_\theta} \right) + k_3 \left( \frac{\Lambda_\theta}{2a_\theta} \right)^2 \quad (17)$$

où  $\Lambda_\theta$  et  $2a_\theta$  sont respectivement la longueur d'onde et le diamètre du monocristal à la température  $\theta$ . Écrivons maintenant l'expression de l'erreur « absolue » sur le rapport  $V_\theta/V_0$  :

$$\Delta \left( \frac{V_\theta}{V_0} \right) = \frac{V_\theta}{V_0} \left( \frac{\Delta V_\theta}{V_\theta} - \frac{\Delta V_0}{V_0} \right)$$

dont on évalue aisément l'ordre de grandeur en substituant au second membre les expressions (16) et (17) et en tenant compte des résultats de nos mesures des